

Вариант 10

Математика Профильный уровень

Часть 1

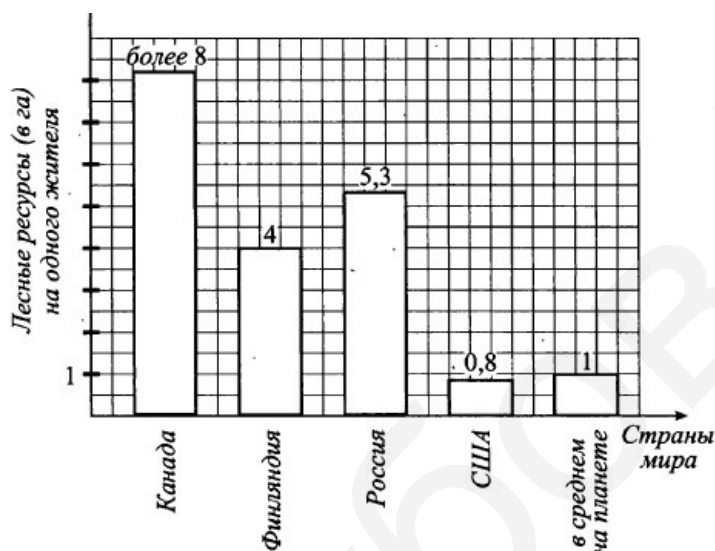
Ответом на задания 1—12 должно быть целое число или десятичная дробь.

- 1 Коля отправил SMS-сообщения своим 15 друзьям. Стоимость одного SMS-сообщения равна 1 рубль 20 копеек. Перед отправкой сообщения на счету у Коли было 50 рублей. Сколько рублей останется у Коли после отправки всех сообщений?

1

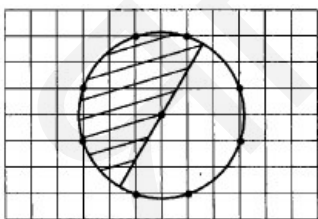
- 2 На диаграмме показано обеспечение каждого жителя планеты лесными ресурсами. По горизонтали отмечены страны мира, по вертикали — лесные ресурсы на каждого жителя в гектарах. Определите по диаграмме разность между средним обеспечением лесными ресурсами по планете и в США.

2



- 3 Найдите (в см²) площадь S закрашенной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см x 1 см. В ответе укажите S / π.

3



- 4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.

4

- 5 Найдите корень уравнения $\log_7(5-x) = -2$.

5

- 6 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, BC = 8, $\sin A = 1/4$. Найдите AH.

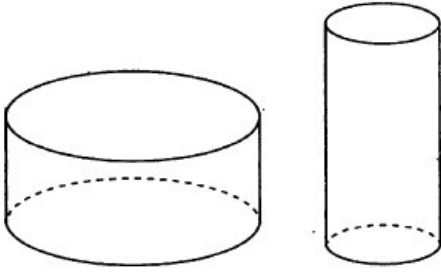
6

- 7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} - 6t + 7$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала

7

движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 8 м/с?

- 8 Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 72. У второго цилиндра высота в два раза больше, а радиус основания в три раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



- 9 Найдите значение выражения $15\lg 15^\circ * \lg 285^\circ$.

- 10 В баке, имеющем форму цилиндра, на боковой стенке у дна закреплён кран. После его открытия вода, находящаяся в баке, начинает вытекать, и высота столба воды (м) меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = 1/80$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, g — ускорение свободного падения ($g = 10$ м/сек²). Найдите, через сколько секунд после открытия крана в баке не станет воды.

- 11 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 8 минут, второй и третий — за $16/3$ минут, первый и третий также за $16/3$ минут. За сколько минут эти три насоса заполняют бассейн, работая вместе?

- 12 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 7)^{11} - 11x$ на отрезке $[-6,5; -4]$.

При выполнении заданий 13—19 требуется записать полное решение и ответ.

13

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} - \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1.$$

а) Решите уравнение

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$

а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$

14 В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD с вершиной S расстояние между прямыми BD и AS равно 2.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки A и S перпендикулярно прямой BD.

б) Найдите объём данной пирамиды, если её боковое ребро равно 5.

$$\frac{20\sqrt{5}}{3} \text{ или } \frac{40\sqrt{5}}{3}$$

15 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |\log_3(9 - x^2) - 5| + \log_3(9 - x^2) \geq 6x^2 - x^4, \\ \log_{3-x}\left(\log_4 \frac{x+5}{x+2}\right) \geq 0. \end{cases}$$

$$\{-1\} \cup [\sqrt{5}; 3)$$

16 В выпуклом четырёхугольнике ABCD на сторонах AD и CD взяты точки M и N, такие, что каждая из прямых CM и AN делит ABCD на две фигуры равных площадей.

а) Докажите, что AC параллельно MN.

б) Найдите отношение площадей четырёхугольников ABCD и ABCO, где O — точка пересечения BD и MN.

$$2 : 1$$

17 Гражданин Плюшкин выиграл по лотерейному билету в Британской национальной лотерее, в которой выигрыш не облагается налогом. На 800 тысяч долларов он купил предприятие, а остальные деньги положил в банк под 6% годовых от вложенной суммы.

В конце года выяснилось, что за год было реализовано продукции на 550 тысяч долларов, из них 350 тысяч долларов составили затраты производства (стоимость сырья, ремонт оборудования и т.п.) и 100 тысяч долларов уплачено персоналу. Остальные деньги составила прибыль гражданина Плюшкина. Через сколько лет общая сумма прибыли Плюшкина в первый раз превысит или будет равна начальному капиталу, вложенному в производство, если каждый год масштаб реализации продукции повышается на 10% от начального, затраты производства повышаются на 6% от первоначальных, а зарплата персонала увеличивается на 4% от первоначальной?

$$5 \text{ лет}$$

18 Найдите все значения а, для каждого из которых уравнение $x^{10} - (2a + 2|x| + a^2)^5 + x^2 =$

$2a + 2|x| + a^2$ имеет ровно два различных решения.

$(-\infty; -2) \cup$
 $\cup \{-1\} \cup$
 $\cup (0; +\infty)$

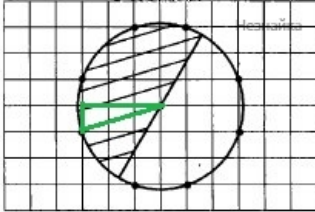
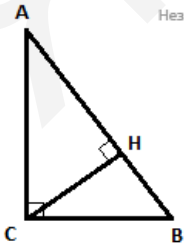
- 19 Натуральные числа от 1 до n в порядке возрастания записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Можно ли добиться того, чтобы сумма каждого числа и записанного под ним была бы точным квадратом:

а) при $n = 6$;

б) при $n = 13$;

в) при $n = 2014$?

а) нельзя б) можно в) можно

1	32 Переведём стоимость сообщения в копейки, для удобства счёта, будет 120 копеек. Всего 15 сообщений, по 120 копеек, $15 \cdot 120 = 1800$ копеек- это 18 рублей. Было 50 рублей, снимут 18. $50 - 18 = 32$. Ответ: 32 рубля останется на счету.
2	0,2 1(в мире)-0ю
3	5  $R = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \quad S = \frac{\pi R^2}{2\pi} = \frac{(\sqrt{10})^2}{2} = 5$
4	0,08 всего вариантов выпадения очков $6^2 = 36$ (6 - количество граней, 2 - сколько кубиков) сумма равна четырем когда: на первом 3 на втором 1 на обоих 2 на первом 1 на втором 3 вероятность выпадения 4 = $3/36 = 0,083333...$ округляем до сотых ответ 0,08
5	-44 $\log_{\frac{1}{7}}(5 - x) = -2$ $\log_{\frac{1}{7}}(5 - x) = \log_{\frac{1}{7}} 49$ $5 - x = 49$ $x = -44$
6	30 Незнайка $BC = 8$ $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{CH}{AC} = \frac{1}{4}$ $\frac{8}{AB} = \frac{1}{4} \quad AB = 32$ $AC = \sqrt{32 * 32 - 8 * 8} =$ $= \sqrt{8 * 8(4 * 4 - 1)} = 8\sqrt{15}$ Незнайка $\frac{CH}{8\sqrt{15}} = \frac{1}{4} \quad CH = 2\sqrt{15}$ $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2}$ $= \sqrt{8 * 8 * 15 - 2 * 2 * 15} =$ $= \sqrt{15 * 4(4 * 4 - 1)} = \sqrt{60 * 15} = 30$ 

7	$v = x'(t) = \frac{3t^2}{3} - \frac{10t}{2} - 6$ $8 = t^2 - 5t - 6$ $t^2 - 5t - 14 = 0$ $t_1 t_2 = -14 \quad t_1 + t_2 = 5$ $t_1 = 7 \quad t_2 = -2$ $t = 7$
8	16 $V_1 = \pi R^2 h = 72 \quad h = \frac{72}{\pi R^2}$ $V_2 = 2\pi \frac{R^2}{9} h =$ $= 2\pi \frac{R^2}{9} * \frac{72}{\pi R^2} =$ $= \frac{144}{9} = 16$
9	-15 $15 * \operatorname{tg} 15 * \operatorname{tg} 285 =$ $= 15 * \operatorname{tg} 15 * \operatorname{tg}(270 + 15) =$ $= -15 * \operatorname{tg} 15 * \operatorname{ctg} 15 = -15$
10	160
11	4
12	66
13	$a) \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ $б) \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}$
14	$\frac{20\sqrt{5}}{3} \text{ или } \frac{40\sqrt{5}}{3}$
15	$\{-1\} \cup [\sqrt{5}; 3)$
16	2 : 1
17	5 лет
18	$(-\infty; -2) \cup$ $\cup \{-1\} \cup$ $\cup (0; +\infty)$
19	а) нельзя б) можно в) можно

Обо всех неточностях пишите на почту (с указанием номера варианта и задания):
dasha@neznaika.pro

Источник: <http://neznaika.pro/test/math/p/352-variant-10.html>