Алгоритм Евклида

8 октября • 9 класс

1. Найдите НОД $(728, 273)$ и $(65457; 1321)$.

2. **a)** Докажите, что $(n+3,\ 5n+14)$ взаимно просты при любом целом n; **b)** Какие значения может принимать $(3n+2,\ 10n+23)$?

3. Вася посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Петя – всех чисел от 501 до 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?

4. Пусть m, n – целые взаимнопростые числа. Найдите наибольшее возможное значение $(n+2016m,\ m+2016n)$.

5. Пусть a и b – натуральные числа. Докажите, что среди чисел $a, 2a, 3a, ..., ba$ ровно $(a,\ b)$ чисел делится на b.

6. Натуральные числа a и b взаимно просты. По окружности длины a катится колесо длины b, в обод которого вбит гвоздь, оставляющий на окружности отметины.

a) Докажите, что в какой-то момент новые отметины перестанут появляться.

b) Докажите, что в этот момент отметины делят обод неподвижного колеса на равные части.

c) Пусть c — длина отрезка между двумя соседними отметинами. Докажите, что $c = 1$.

d) **(Линейное представление НОД)** Докажите, что существуют целые числа m и n такие, что $ma + nb = 1$.

e) Докажите, что для произвольных чисел a и b (не обязательно взаимнопростых) существуют целые числа m и n, такие что $am + bn = (a, b)$.

7. В государстве имеют хождение монеты достоинством a и b золотых, где a и b – взаимнопростые натуральные числа. Докажите, что такими монетами можно (возможно, со сдачей) набрать любую сумму.

8. Докажите, что угол в 17° можно разделить с помощью циркуля и линейки на 17 равных частей.

9. В классе химии имеются 25 пробирок объема 1, 2, ..., 25 мл. Когда химики стали собираться в ЛМШ, оказалось, что у них осталось мало места, и они могут взять только набор из 10 пробирок. Химики хотят, чтобы с помощью любых двух пробирок из набора можно было отмерить 1 мл. Сколькими способами можно составить такой набор?

10. Петя произвольным образом разложил некоторое количество монет по 30 коробкам. Вася может выбрать любые k коробок и добавить в каждую из них по монете. При каких k Вася такими операциями сможет при любом исходном раскладе уравнять число монет во всех коробках?

11. **a)** Числа a, b и c взаимнопросты в совокупности, то есть $(a, b, c) = 1$.
Докажите, что любое число d можно представить в виде $d = ax + by + cz$, где x, y, z — целые.

b) Сформулируйте и докажите аналогичную задачу, если изначально дано n чисел, взаимнопростых в совокупности.