

## Делители и суммы делителей

### Учимся говорить

Пусть  $n$  — натуральное число. Обозначим через  $\tau(n)$  число натуральных делителей числа  $n$ . Обозначим через  $\sigma(n)$  сумму всех натуральных делителей числа  $n$ .

1. Докажите, что  $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$
2. Как посчитать  $\tau(n)$ , зная разложение  $n$  на простые множители?
3. (а) Найдется ли натуральное число, большее 20172017, все натуральные делители которого можно разбить на две группы с одинаковыми суммами?  
(б) Найдется ли натуральное число, большее 20172017, все натуральные делители которого можно разбить на две группы с одинаковым количеством делителей и суммой делителей?
4. Даны два натуральных числа  $m$  и  $n$ . Известно, что сумма всех делителей числа  $m$  равна сумме всех делителей числа  $n$  (в сумму делителей входят 1 и само число). Также сумма всех чисел, обратных к делителям  $m$ , равна сумме всех чисел, обратных к делителям  $n$ . Докажите, что  $m = n$ .
5. Докажите, что функции  $\tau(n)$  и  $\sigma(n)$  мультипликативны. Напомним, мультипликативность означает, что для любых взаимно простых  $m$  и  $n$   $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$  и  $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ .

**Определение.** Натуральное число называется совершенным, если сумма его собственных делителей (т. е. всех без самого числа) равна самому числу.

Первые два совершенных числа — это 6 и 28.

А как будет звучать определение совершенного числа в терминах функции  $\sigma(n)$ ?

6. (а) Докажите, что если число  $2^p - 1$  простое, то число  $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$  совершенное.  
(б) Докажите, что любое четное совершенное число имеет вид  $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ , где  $2^p - 1$  — простое.  
Существуют ли нечетные совершенные числа, неизвестно.
7. (а) Докажите, что найдется натуральное  $m$ , для которого  $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/m > 100$ .  
(б) Докажите, что существует натуральное  $n$ , для которого  $\sigma(n) > 100n$ .  
Здесь может быть полезен предыдущий пункт.
8. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде разности двух натуральных чисел, имеющих поровну простых делителей.
9. На Великой Китайской стене написаны все натуральные числа от  $9 \cdot 10^k$  до  $12 \cdot 10^k$  ( $k$  — натуральное). Катя выбрала у каждого из выписанных чисел соб-

### Учимся писать

10. Дано натуральное число  $n$ . Известно, что  $n + 1$  делится на 24. Докажите, что сумма всех делителей  $n$  делится на 24.
11. Пусть  $n$  — натуральное число,  $d$  и  $d'$  — два его делителя,  $d < d'$ . Докажите неравенство:  $d' > d + d^2/n$ .