

*Кружок в "Хамовниках". 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-1.*  
**Серия 22. Подготовка к региону + немного графов.**

**1.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  выбрали произвольную точку  $P$ .  $AP$  пересекает  $BC$  в точке  $D$ . Пусть  $K$  - точка пересечения описанной окружности треугольника  $PDC$  и медианы  $CC_1$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $APK$  всегда проходит через одну и ту же точку, отличную от  $A$ .

**2.** Набор чисел  $M$  состоит из 6 различных чисел, дающих в сумме 60. Эти числа написаны на гранях куба, по одному на каждой грани. За один ход можно выбрать три грани с общей вершиной и прибавить к числам на гранях по 1. Найдите количество таких наборов  $M$ , что числа этого набора можно написать на гранях куба, а затем за несколько ходов сделать их равными.

**3.** Пусть задано некоторое натуральное  $n > 2$ . Найдите наибольшее  $d$  такое, что в любом наборе из  $n$  натуральных чисел можно найти 3 различных (возможно, пересекающихся) непустых подмножества таких, что сумма чисел в каждом из этих подмножеств кратна  $d$ .

---

**4.** В компании из 80 людей есть ровно 1100 пар друзей (дружба взаимна), но при этом нет таких трёх людей, что они попарно дружат между собой. Докажите, что у каждого человека не более 63 друзей.

**5.** В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей (дружба взаимна). Докажите, что в компании найдётся человек, у которого больше 20, но меньше 70 друзей.

**6.** 300 бюрократов разбиты на три комиссии по 100 человек. Каждые два бюрократа либо знакомы друг с другом, либо незнакомы. Докажите, что найдутся два таких бюрократа из разных комиссий, что в третьей комиссии есть либо 17 человек, знакомых с обоими, либо 17 человек, незнакомых с обоими.

**7.** Имеются три комиссии бюрократов. Известно, что для каждой пары бюрократов из разных комиссий среди членов оставшейся комиссии есть ровно 10 бюрократоров, которые знакомы с обоими, и ровно 10 бюрократоров, которые незнакомы с обоими. Найдите общее число бюрократов в комиссиях.

*Кружок в "Хамовниках". 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-1.*  
**Серия 22. Подготовка к региону + немного графов.**

**1.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  выбрали произвольную точку  $P$ .  $AP$  пересекает  $BC$  в точке  $D$ . Пусть  $K$  - точка пересечения описанной окружности треугольника  $KDC$  и медианы  $CC_1$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $APK$  всегда проходит через одну и ту же точку, отличную от  $A$ .

**2.** Набор чисел  $M$  состоит из 6 различных чисел, дающих в сумме 60. Эти числа написаны на гранях куба, по одному на каждой грани. За один ход можно выбрать три грани с общей вершиной и прибавить к числам на гранях по 1. Найдите количество таких наборов  $M$ , что числа этого набора можно написать на гранях куба, а затем за несколько ходов сделать их равными.

**3.** Пусть задано некоторое натуральное  $n > 2$ . Найдите наибольшее  $d$  такое, что в любом наборе из  $n$  натуральных чисел можно найти 3 различных (возможно, пересекающихся) непустых подмножества таких, что сумма чисел в каждом из этих подмножеств кратна  $d$ .

---

**4.** В компании из 80 людей есть ровно 1100 пар друзей (дружба взаимна), но при этом нет таких трёх людей, что они попарно дружат между собой. Докажите, что у каждого человека не более 63 друзей.

**5.** В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей (дружба взаимна). Докажите, что в компании найдётся человек, у которого больше 20, но меньше 70 друзей.

**6.** 300 бюрократов разбиты на три комиссии по 100 человек. Каждые два бюрократа либо знакомы друг с другом, либо незнакомы. Докажите, что найдутся два таких бюрократа из разных комиссий, что в третьей комиссии есть либо 17 человек, знакомых с обоими, либо 17 человек, незнакомых с обоими.

**7.** Имеются три комиссии бюрократов. Известно, что для каждой пары бюрократов из разных комиссий среди членов оставшейся комиссии есть ровно 10 бюрократоров, которые знакомы с обоими, и ровно 10 бюрократоров, которые незнакомы с обоими. Найдите общее число бюрократов в комиссиях.