10 класс | Теорема Хелли | 14 сентября 2017

1. Теорема Хелли для прямой. На прямой отмечено несколько отрезков, интервалов и лучей так, что любые два отмеченных множества имеют общую точку. Докажите, что все отмеченные множества имеют общую точку.

Определение. Подмножество M в $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек A и B, лежащих в M, отрезок AB полностью лежит в M.

Упражнение. Докажите, что пересечение выпуклых множеств является выпуклым.

2. Теорема Хелли для плоскости. На плоскости отмечено несколько выпуклых множеств. Известно, что любые три из них имеют общую точку. Докажите, что

а) любые четыре множества имеют общую точку;

б) все множества имеют общую точку.

в) Докажите, что теорема Хелли не верна для бесконечного числа множеств.

3. На плоскости отмечено несколько точек. Оказалось, что любые три точки можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все точки также покрываются кругом радиуса 1.

4. Теорема Юнга. Докажите, что любой многоугольник, расстояние между вершинами которого не превосходит 1, можно покрыть

а) кругом радиуса $\sqrt{1/3}$;

б) правильным шестиугольником со стороной $\sqrt{1/3}$.

5. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдётся точка, не принадлежащая ни одному из четырёхугольников, образованных четвёрками его последовательных вершин.

6. На окружности отметили несколько дуг длины меньше половины окружности. Известно, что любые три дуги имеют общую точку. Докажите, что все дуги имеют общую точку.

7. Теорема Бляшке. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник, который нельзя покрыть полосой ширины меньше 1, можно вписать окружность радиуса $1/3$.

10 класс | Теорема Хелли | 14 сентября 2017

1. Теорема Хелли для прямой. На прямой отмечено несколько отрезков, интервалов и лучей так, что любые два отмеченных множества имеют общую точку. Докажите, что все отмеченные множества имеют общую точку.

Определение. Подмножество M в $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек A и B, лежащих в M, отрезок AB полностью лежит в M.

Упражнение. Докажите, что пересечение выпуклых множеств является выпуклым.

2. Теорема Хелли для плоскости. На плоскости отмечено несколько выпуклых множеств. Известно, что любые три из них имеют общую точку. Докажите, что

а) любые четыре множества имеют общую точку;

б) все множества имеют общую точку.

в) Докажите, что теорема Хелли не верна для бесконечного числа множеств.

3. На плоскости отмечено несколько точек. Оказалось, что любые три точки можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все точки также покрываются кругом радиуса 1.

4. Теорема Юнга. Докажите, что любой многоугольник, расстояние между вершинами которого не превосходит 1, можно покрыть

а) кругом радиуса $\sqrt{1/3}$;

б) правильным шестиугольником со стороной $\sqrt{1/3}$.

5. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдётся точка, не принадлежащая ни одному из четырёхугольников, образованных четвёрками его последовательных вершин.

6. На окружности отметили несколько дуг длины меньше половины окружности. Известно, что любые три дуги имеют общую точку. Докажите, что все дуги имеют общую точку.

7. Теорема Бляшке. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник, который нельзя покрыть полосой ширины меньше 1, можно вписать окружность радиуса $1/3$.