10 класс **Геометрия в алгебре** 18 сентября 2017

1. а) Положительные числа a, b, c, A, B, C таковы, что $a+A=b+B=c+C=S$. Докажите, что $aB+bC+cA<S^2$.

б) Неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4 не превосходят 1. Докажите, что

$$0 \leqslant x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+x_3(1-x_4)+x_4(1-x_1) \leqslant 2.$$

2. Пусть $a, b, c>0$. Докажите, что

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqslant \sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

3. Положительные числа x, y, z, t дают в сумме 10. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+2}+\sqrt{z^2+3}+\sqrt{t^2+4}$.

4. Пусть $|x_1|, |x_2| \leqslant 1$. Докажите, что $\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2} \leqslant 2\sqrt{1-(\frac{x_1+x_2}{2})^2}$.

5. Положительные числа x, y, z таковы, что $\begin{cases} x^2+xy+\frac{y^2}{3}=25, \\ \frac{y^2}{3}+z^2=9, \\ z^2+zx+x^2=16. \end{cases}$

Найдите $xy+2yz+3xz$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} y=2x^2-1, \\ z=2y^2-1, \\ x=2z^2-1. \end{cases}$

7. Пусть $a_1=\frac{1}{2}$ и $a_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$ для всех натуральных n. Докажите, что сумма первых 2017 членов этой последовательности меньше, чем 1,03.

8. а) Докажите, что среди любых шести чисел найдутся два числа x, y такие, что $0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) Докажите, что среди любых трёх чисел найдутся два числа x, y такие, что $0 \leqslant \frac{x-y}{1+x+y+2xy} \leqslant \sqrt{3}$.

9. Дана функция $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+2xyz$. Положительные числа a, b, c, x_1, x_2, $\ldots$, x_7 удовлетворяют соотношениям $f(x_1, x_2, a)=f(x_2, x_3, b)=$ $=f(x_3, x_4, c)=f(x_4, x_5, a)=f(x_5, x_6, b)=f(x_6, x_7, c)=1$. Докажите, что $x_7=x_1$.

10 класс **Геометрия в алгебре** 18 сентября 2017

1. а) Положительные числа a, b, c, A, B, C таковы, что $a+A=b+B=c+C=S$. Докажите, что $aB+bC+cA<S^2$.

б) Неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4 не превосходят 1. Докажите, что

$$0 \leqslant x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+x_3(1-x_4)+x_4(1-x_1) \leqslant 2.$$

2. Пусть $a, b, c>0$. Докажите, что

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqslant \sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

3. Положительные числа x, y, z, t дают в сумме 10. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+2}+\sqrt{z^2+3}+\sqrt{t^2+4}$.

4. Пусть $|x_1|, |x_2| \leqslant 1$. Докажите, что $\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2} \leqslant 2\sqrt{1-(\frac{x_1+x_2}{2})^2}$.

5. Положительные числа x, y, z таковы, что $\begin{cases} x^2+xy+\frac{y^2}{3}=25, \\ \frac{y^2}{3}+z^2=9, \\ z^2+zx+x^2=16. \end{cases}$

Найдите $xy+2yz+3xz$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} y=2x^2-1, \\ z=2y^2-1, \\ x=2z^2-1. \end{cases}$

7. Пусть $a_1=\frac{1}{2}$ и $a_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$ для всех натуральных n. Докажите, что сумма первых 2017 членов этой последовательности меньше, чем 1,03.

8. а) Докажите, что среди любых шести чисел найдутся два числа x, y такие, что $0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) Докажите, что среди любых трёх чисел найдутся два числа x, y такие, что $0 \leqslant \frac{x-y}{1+x+y+2xy} \leqslant \sqrt{3}$.

9. Дана функция $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+2xyz$. Положительные числа a, b, c, x_1, x_2, $\ldots$, x_7 удовлетворяют соотношениям $f(x_1, x_2, a)=f(x_2, x_3, b)=$ $=f(x_3, x_4, c)=f(x_4, x_5, a)=f(x_5, x_6, b)=f(x_6, x_7, c)=1$. Докажите, что $x_7=x_1$.