10 класс Системы линейных уравнений 12 октября 2017

1. (a) Докажите, что любая имеющая решение система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \qquad (*)$$

равносильна некоторой системе вида

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1k}y_k + d_1 = z_1 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2k}y_k + d_2 = z_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{l1}y_1 + b_{l2}y_2 + \ldots + b_{lk}y_k + d_l = z_l \end{cases},$$

где $l = n - k$, а $(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$ — перестановка переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.

(b) Назовем число k *рангом* системы (*). Докажите, что данное определение ранга корректно, т.е. у всех систем, которым равносильна система (*), значение k совпадает.

2. (a) Докажите, что любая линейная система уравнений либо не имеет решений, либо имеет одно решение, либо имеет бесконечно много решений.

(b) Докажите, что однородная система ($c_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$) имеет либо одно, либо бесконечно много решений.

3. Дана таблица $m \times n$, в крайних клетках которой написаны вещественные числа. Докажите, что остальные клетки таблицы можно заполнить так, чтобы каждое из остальных чисел было средним арифметическим чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках.

4. У Мити есть 100 бананов и чашечные весы без гирь. За какое наименьшее количество взвешиваний он сможет убедиться в том, что все бананы весят одинаково, если веса бананов

(a) произвольные вещественные; **(b)** положительные; **(c)** натуральные числа.

5. Максим гулял по лесу и нашел 500 грибов. Придя домой, он начал их взвешивать, и оказалось, что какой бы гриб Максим ни отложил в сторону, остальные можно разложить на две чаши так, чтобы было равновесие. Докажите, что весы Максима сломаны.

6. На отрезке $[0, 1]$ отметили конечное количество точек так, что любая отмеченная внутренняя точка является серединой отрезка между какими-то двумя другими отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки имеют рациональные координаты.

7. Прямоугольник можно разрезать на конечное количество квадратов. Докажите, что его можно разрезать на конечное количество равных квадратов.

10 класс Системы линейных уравнений 12 октября 2017

1. (a) Докажите, что любая имеющая решение система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \qquad (*)$$

равносильна некоторой системе вида

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1k}y_k + d_1 = z_1 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2k}y_k + d_2 = z_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{l1}y_1 + b_{l2}y_2 + \ldots + b_{lk}y_k + d_l = z_l \end{cases},$$

где $l = n - k$, а $(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$ — перестановка переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.

(b) Назовем число k *рангом* системы (*). Докажите, что данное определение ранга корректно, т.е. у всех систем, которым равносильна система (*), значение k совпадает.

2. (a) Докажите, что любая линейная система уравнений либо не имеет решений, либо имеет одно решение, либо имеет бесконечно много решений.

(b) Докажите, что однородная система ($c_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$) имеет либо одно, либо бесконечно много решений.

3. Дана таблица $m \times n$, в крайних клетках которой написаны вещественные числа. Докажите, что остальные клетки таблицы можно заполнить так, чтобы каждое из остальных чисел было средним арифметическим чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках.

4. У Мити есть 100 бананов и чашечные весы без гирь. За какое наименьшее количество взвешиваний он сможет убедиться в том, что все бананы весят одинаково, если веса бананов

(a) произвольные вещественные; **(b)** положительные; **(c)** натуральные числа.

5. Максим гулял по лесу и нашел 500 грибов. Придя домой, он начал их взвешивать, и оказалось, что какой бы гриб Максим ни отложил в сторону, остальные можно разложить на две чаши так, чтобы было равновесие. Докажите, что весы Максима сломаны.

6. На отрезке $[0, 1]$ отметили конечное количество точек так, что любая отмеченная внутренняя точка является серединой отрезка между какими-то двумя другими отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки имеют рациональные координаты.

7. Прямоугольник можно разрезать на конечное количество квадратов. Докажите, что его можно разрезать на конечное количество равных квадратов.