

Факт. Дифференцируемая функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является неубывающей (невозрастающей) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) при всех $x \in [a, b]$.

Следствие. Если $f(a) \geq g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$ при всех $x > a$, то верно $f(x) > g(x)$ при всех $x > a$.

Упражнение. Докажите, что любой многочлен до какого-то момента и с какого-то момента монотонен.

1. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что $2x^9 + 9x^8 \leq 9x^{10} + 2$.

2. Пусть $x \neq 0$. Докажите, что $e^x > 1 + x$.

3. Пусть $a, b \geq 0$. Докажите, что $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$.

4. Пусть $\alpha > 1$, $x > -1$. Докажите, что $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

5. Сколько корней может быть у уравнения $e^x = ax^2 + bx + c$?

6. Для различных положительных чисел a и b рассмотрим их *среднее логарифмическое* $\frac{a-b}{\ln a - \ln b}$. Докажите, что среднее логарифмическое находится между средним геометрическим и средним арифметическим чисел a и b .

7. Пусть $x > 0$. Докажите, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ и $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

8. Пусть $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^{2n}}{2n} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

9. Для острых углов $\alpha < \beta$ докажите, что $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

10. Сравните числа а) $\log_2 3$ и $\log_3 4$; б) $\cos 1$ и $1 + \cos 2$; в) e^π и π^e .

11. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Какие значения может принимать

а) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$; б) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$?

12. а) **Неравенство Юнга.** Пусть $a, b \geq 0$, $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

б) **Неравенство Гёльдера.** Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$, $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

в) **Неравенство Минковского.** Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ и $p > 1$. Докажите, что

$$((a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Факт. Дифференцируемая функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является неубывающей (невозрастающей) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) при всех $x \in [a, b]$.

Следствие. Если $f(a) \geq g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$ при всех $x > a$, то верно $f(x) > g(x)$ при всех $x > a$.

Упражнение. Докажите, что любой многочлен до какого-то момента и с какого-то момента монотонен.

1. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что $2x^9 + 9x^8 \leq 9x^{10} + 2$.

2. Пусть $x \neq 0$. Докажите, что $e^x > 1 + x$.

3. Пусть $a, b \geq 0$. Докажите, что $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$.

4. Пусть $\alpha > 1$, $x > -1$. Докажите, что $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

5. Сколько корней может быть у уравнения $e^x = ax^2 + bx + c$?

6. Для различных положительных чисел a и b рассмотрим их *среднее логарифмическое* $\frac{a-b}{\ln a - \ln b}$. Докажите, что среднее логарифмическое находится между средним геометрическим и средним арифметическим чисел a и b .

7. Пусть $x > 0$. Докажите, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ и $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

8. Пусть $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^{2n}}{2n} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

9. Для острых углов $\alpha < \beta$ докажите, что $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

10. Сравните числа а) $\log_2 3$ и $\log_3 4$; б) $\cos 1$ и $1 + \cos 2$; в) e^π и π^e .

11. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Какие значения может принимать

а) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$; б) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$?

12. а) **Неравенство Юнга.** Пусть $a, b \geq 0$, $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

б) **Неравенство Гёльдера.** Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$, $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

в) **Неравенство Минковского.** Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ и $p > 1$. Докажите, что

$$((a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$