10 класс | Спуск по Виету | 15 марта 2018

1. Натуральные числа a и b таковы, что число $\dfrac{a^2+b^2}{ab-1}$ — целое. Докажите, что оно равно 5.

2. Натуральные числа a и b таковы, что число a^2+b^2+1 делится на ab.

а) Чему может быть равно частное?

б) Докажите, что a и b — числа Фибоначчи.

3. а) Докажите, что если для некоторых натуральных чисел a, b, k выполнено равенство $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=k$, то k — точный квадрат.

б) Для натурального m зададим последовательность $a_0=0$, $a_1=m$, $a_{n+2}=m^2a_{n+1}-a_n$. Докажите, что любые два натуральных числа x и y, для которых $\dfrac{x^2+y^2}{xy+1}=m^2$, являются соседними членами этой последовательности.

4. Докажите, что уравнение $a^2+b^2+c^2=kabc$ в натуральных числах

а) не имеет решений при $k=2$;

б) не имеет решений при $k>3$;

в) имеет бесконечно много решений при $k=1$ и $k=3$.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $0<a^2+b^2-abc<c$. Докажите, что a^2+b^2-abc — точный квадрат.

6. Дано натуральное число k. Докажите, что существует бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ такая, что для любого n число a_n^2+k делится на a_{n+1}, а число a_{n+1}^2+k делится на a_n.

7. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c, d, бóльшие 10^{2018}, такие, что $a^2+b^2+c^2+d^2=abc+abd+acd+bcd$.

8. Найдите количество пар различных натуральных чисел (m, n), меньших 100, для которых m^2-1 делится на n, а n^2-1 делится на m.

9. Решите в натуральных числах уравнение $4a^3+b+c=4abc+2a$.

10. Какие натуральные значения может принимать выражение $\dfrac{(a+b+c)^2}{abc}$ при натуральных a, b, c?

10 класс | Спуск по Виету | 15 марта 2018

1. Натуральные числа a и b таковы, что число $\dfrac{a^2+b^2}{ab-1}$ — целое. Докажите, что оно равно 5.

2. Натуральные числа a и b таковы, что число a^2+b^2+1 делится на ab.

а) Чему может быть равно частное?

б) Докажите, что a и b — числа Фибоначчи.

3. а) Докажите, что если для некоторых натуральных чисел a, b, k выполнено равенство $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=k$, то k — точный квадрат.

б) Для натурального m зададим последовательность $a_0=0$, $a_1=m$, $a_{n+2}=m^2a_{n+1}-a_n$. Докажите, что любые два натуральных числа x и y, для которых $\dfrac{x^2+y^2}{xy+1}=m^2$, являются соседними членами этой последовательности.

4. Докажите, что уравнение $a^2+b^2+c^2=kabc$ в натуральных числах

а) не имеет решений при $k=2$;

б) не имеет решений при $k>3$;

в) имеет бесконечно много решений при $k=1$ и $k=3$.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $0<a^2+b^2-abc<c$. Докажите, что a^2+b^2-abc — точный квадрат.

6. Дано натуральное число k. Докажите, что существует бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ такая, что для любого n число a_n^2+k делится на a_{n+1}, а число a_{n+1}^2+k делится на a_n.

7. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c, d, бóльшие 10^{2018}, такие, что $a^2+b^2+c^2+d^2=abc+abd+acd+bcd$.

8. Найдите количество пар различных натуральных чисел (m, n), меньших 100, для которых m^2-1 делится на n, а n^2-1 делится на m.

9. Решите в натуральных числах уравнение $4a^3+b+c=4abc+2a$.

10. Какие натуральные значения может принимать выражение $\dfrac{(a+b+c)^2}{abc}$ при натуральных a, b, c?