

Последовательности

1. Последовательность $\{a_i\}$ такова, что $a_0 = a_1 = 1$, а $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n - 4$. Докажите, что a_k — точный квадрат.
2. Дана некоторая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots$. Среди членов арифметической прогрессии встречаются числа a_1^2, a_2^2, a_3^2 . Докажите, что все члены прогрессии — целые числа.
3. а) Докажите, что если для некоторых натуральных a, b, k выполнено равенство $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$, то k — точный квадрат.
б) Для некоторого натурального m зададим последовательность $a_0 = 0, a_1 = m, a_{n+2} = m^2 a_{n+1} - a_n$. Докажите, что любые два натуральных числа $x \geq y$, для которых $\frac{x^2+y^2}{xy+1} = m^2$, являются соседними членами этой последовательности.
4. Дано натуральное число k . Докажите, что существует такая бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$, что для любого n число $a_n^2 + k$ делится на a_{n+1} , а число $a_{n+1}^2 + k$ делится на a_n .
5. Последовательность $\{a_i\}$, состоящая из натуральных чисел, такова, что для любого натурального n выполнено $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$. Докажите, что при $n > 100$ число $a_n - 22$ составное.
6. Последовательность a_i действительных чисел такова, что для любых натуральных m и n выполнено $|a_m + a_n - a_{m+n}| \leq \frac{1}{m+n}$. Докажите, что последовательность a_i является арифметической прогрессией.
7. Даны вещественные числа $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$. Зададим последовательности $u_0, u_1 \dots u_n$ и $v_0, v_1 \dots v_n$: $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$ и $u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}, v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$ при $1 \leq k \leq n-1$. Докажите, что $u_n = v_n$.
8. Бесконечная возрастающая последовательность чисел $\{a_i\}$ такова, что $a_{k+1} - a_k < 1000$. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел $n < m$, что a_m делится на a_n .