

Лемма Шпернера

Определение. Триангуляцией многоугольника на плоскости называется разбиение многоугольника на треугольники, любые два из которых либо вообще не пересекаются, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону.

0. На окружности отмечено несколько красных и несколько синих точек. Докажите, что число дуг разбиения с разноцветными концами чётно.
1. Сферу триангулировали, вершины триангуляции произвольным образом раскрашены в три цвета. Докажите, что число треугольников триангуляции с разноцветными вершинами чётно.
2. **Лемма Шпернера.** Данна триангуляция треугольника ABC . Вершины A , B и C раскрашены в цвета 1, 2 и 3 соответственно. Вершины треугольников триангуляции на стороне AB раскрашены в цвета 1 и 2 (аналогично на AC — в 1 и 3, на BC — в 2 и 3). Вершины внутри раскрашены в произвольные цвета (1, 2 или 3). Докажите, что найдется треугольник триангуляции с разноцветными вершинами.
3. Каждую сторону треугольника поделили на n равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные его сторонам. В результате получилась триангуляция треугольника. Каждую вершину триангуляции покрасили в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что число двуцветных ребер триангуляции четно.
4. Квадрат $[0, 2n + 1] \times [0, 2n + 1]$ координатной плоскости разрезан на треугольники, координаты всех вершин целочисленны. Докажите, что найдется треугольник с нецелой площадью.
5. **Теорема Брауэра.** Дан треугольник Δ (с границей и со внутренностью) и непрерывное отображение $f: \Delta \rightarrow \Delta$. Используя лемму Шпернера, докажите, что отображение f обладает неподвижной точкой.
6. **Лемма Таккера.** Данна триангуляция правильного чётноугольника, каждая вершина триангуляции отмечена одним из чисел $\{1, 2, -1, -2\}$. Оказалось, что противоположные вершины исходного правильного чётноугольника отмечены противоположными числами. Докажите, что существуют две вершины с противоположными числами, соединённые ребром.
7. **Теорема Борсука-Улама.** Докажите, что для любого антиподального непрерывного отображения $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ существует такая точка $x_0 \in S^2$, что $f(x_0) = (0, 0)$. Сфера S^2 — обычная двумерная сфера в трёхмерном пространстве. Отображение $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется антиподальным, если значения f в диаметрально противоположных точках сферы в сумме дают $(0, 0)$.
8. (а) Квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ координатной плоскости разрезан на n равновеликих треугольников, все вершины которых имеют двоично-рациональные координаты. Докажите, что n — чётное число. (б) Квадрат разрезан на n равновеликих треугольников. Докажите, что n — чётное число.