Обобщенная теорема Ван дер Вардена

1. Клетки бесконечного листа бумаги раскрашены в N цветов. **(a)** Докажите, что найдется клетчатый прямоугольник, угловые клетки которого раскрашены в один и тот же цвет. **(b)** Докажите, что найдутся 100 строк и 100 столбцов, клетки на пересечении которых раскрашены в один и тот же цвет.

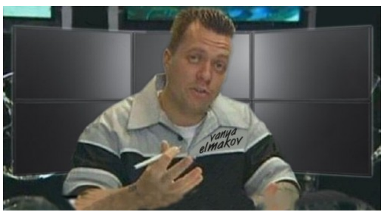
2. Докажите, что натуральные числа можно покрасить в 2 цвета так, чтобы не было ни арифметических, ни геометрических бесконечных монохроматических прогрессий.

Теорема Ван дер Вардена. Если натуральный ряд раскрашен в конечное число цветов, то в этой раскраске найдутся сколь угодно длинные монохроматические арифметические прогрессии. Далее в листике будет доказано ее обобщение.

3. Для любых целых чисел m и n и для любого натурального x *уголком* будем называть набор из трех клеток с координатами $(m,n),(m+x,n),(m,n+x)$. Докажите, что при любой раскраске клетчатой плоскости **(a)** в два; **(b)** в три цвета найдется монохроматический уголок.

Обобщенная теорема Ван дер Вардена. Для любой конечной клетчатой фигуры M и для любого натурального числа k существует такое натуральное число N, что при любой раскраске клетчатого квадрата $N \times N$ в k цветов найдется монохроматическая клетчатая фигура, гомотетичная M.

4. Докажем обобщенную теорему Ван дер Вардена. Вместо произвольной фигуры M будем рассматривать *недостроенные прямоугольники* — фигуры, полученные из клетчатых прямоугольников удалением нескольких правых клеток верхней строки.
(a) Докажите базу индукции $|M| = 2$, количество цветов — любое.
(b) Докажите слабый индукционный переход обобщенной теоремы Ван дер Вардена: пусть теорема доказана для фигур размера n и любого числа цветов, докажите для фигур размера $n+1$ и двух цветов.
(c) Докажите сильный индукционный переход обобщенной теоремы Ван дер Вардена: пусть теорема доказана для фигур размера n и любого числа цветов, докажите для фигур размера $n+1$ и k цветов.



5. Некоторые натуральные числа покрашены в красный цвет. Известно, что среди любых 1000 чисел подряд есть красное. Доказать, что есть арифметическая прогрессия длины 100 из красных чисел.

6. Докажите, что при любых натуральных значениях n и N и при любом разбиении натурального ряда на N классов хотя бы один из них содержит n арифметических прогрессий длины n, первые члены которых образуют геометрическую прогрессию.

7. Клетки бесконечной плоскости заполнены целыми числами. Доказать, что есть квадрат с кратной 2018 суммой чисел внутри.