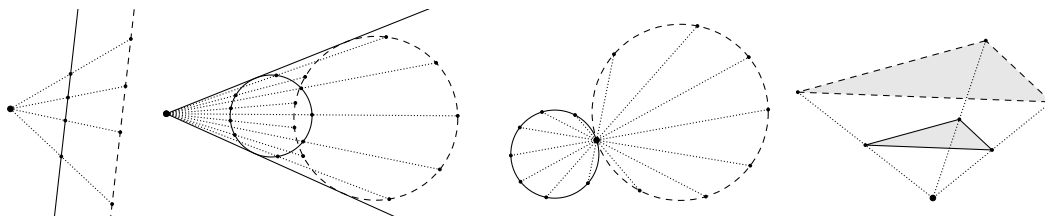


Серия 16. Гомотетия.

Определение. На плоскости дана точка S и зафиксировано вещественное число $k \neq 0$. Гомотетией с центром в точке S и коэффициентом k называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A' такую, что $\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}$.



1. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY . Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
2. Внутри полосы, ограниченной параллельными прямыми a и b , нарисованы две окружности ω_a и ω_b , касающиеся друг друга в точке S . Кроме того, ω_a касается a в точке A ; ω_b касается b в точке B . Докажите, что точка S лежит на отрезке AB .
3. (а) Окружности ω и ω_A — вписанная и невписанная окружности треугольника ABC соответственно. Точки касания ω и ω_A с отрезком BC обозначены через K и K_A ; точки L и L_A лежат на ω и ω_A и диаметрально противоположны K и K_A соответственно. Докажите, что прямые KL_A и K_AL пересекаются в точке A . (б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про точки касания невписанных окружностей ω_B, ω_C с прямой BC .
4. Даны угол и точка M внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M .
5. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка D , что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что и радиусы невписанных окружностей этих треугольников, соответствующих вершине A , тоже равны.
6. К двум непересекающимся окружностям ω_A и ω_B проведена общая касательная AB , причём $A \in \omega_A$, $B \in \omega_B$. Окружность, построенная на AB как на диаметре, повторно пересекает ω_A в точке A' , ω_B в точке B' . Докажите, прямые AB' и $A'B$ пересекаются на линии центров ω_A и ω_B .
7. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I . Лучи AB, DC пересекаются в точке X . Вписанная окружность треугольника XBC касается отрезка BC в точке P ; невписанная окружность треугольника XAD касается отрезка AD в точке Q . Оказалось, что прямая PQ проходит через X . Докажите, что точка I лежит на прямой, соединяющей середины отрезков BC и AD .
8. К плоскости прибиты гвоздями окружность ω , точка A на ней и точка T внутри неё. Рассматриваются всевозможные хорды BC , проходящие через T . Докажите, что все окружности, проходящие через середины сторон треугольника ABC , касаются фиксированной окружности.