

От леммы Архимеда до теоремы Фейербаха

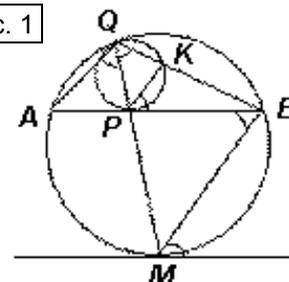
Цель этого занятия – доказать одну из самых красивых теорем элементарной геометрии, пройдя по «цепочке» сравнительно несложных задач, почти не отвлекаясь.

Теорема Фейербаха. В любом треугольнике окружность девяти точек касается вписанной и всех внеписанных окружностей.

Обычно эту теорему доказывают с помощью инверсии, но, на мой взгляд, это менее интересно, поэтому поступим иначе.

1. Вспомним одну знакомую вам геометрическую конфигурацию. В окружности ω радиуса R проведена хорда AB и в сегмент, отсеченный этой хордой, вписана вторая окружность ω_1 радиуса r , касающаяся AB в точке P , а дуги окружности ω – в точке Q . Тогда луч QP является биссектрисой угла AQB (см. рис. 1).

Рис. 1



Доказательство. Пусть луч QP пересекает ω в точке M .

Рассмотрим гомотегию с центром Q и коэффициентом $k = \frac{R}{r}$. При этой гомотетии образом ω_1 является ω , образом точки P – точка M . Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Образом касательной AB к окружности ω_1 является касательная к ω , проходящая через точку M . Угол между этой касательной и хордой BM равен вписанному углу BQM и равен углу ABM (из параллельности касательной и прямой AB). Так как $\angle ABM = \angle AQM$, то $\angle BQM = \angle AQM$, что и требовалось.

Второй способ. Рассмотрим точку K – прообраз точки B при указанной гомотетии, тогда образом прямой PK является прямая BM , значит, $PK \parallel BM$, следовательно, $\angle KPB = \angle PBM$. Кроме того, $\angle BQP = \angle KPB$ и $\angle ABM = \angle AQM$. Таким образом, $\angle BQP = \angle AQP$, что и требовалось.

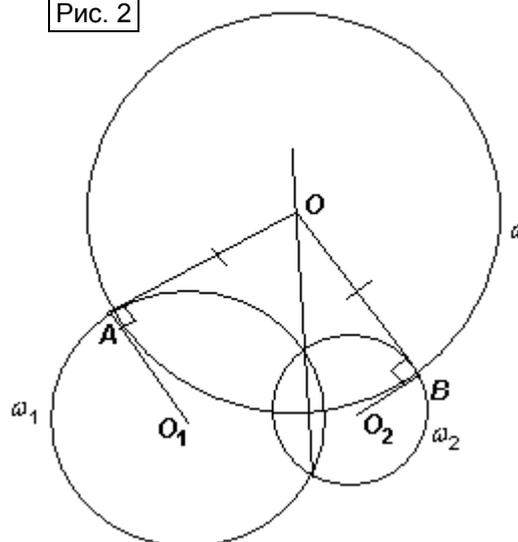
Доказанное утверждение называется леммой Архимеда (или **леммой о сегменте**). Из доказанного сразу следует, что M – середина дуги AB .

2. Вспомним, что такое **ортогональные окружности**.

Определение. Две пересекающиеся окружности называются ортогональными, если касательные к ним в точке их пересечения – взаимно перпендикулярны.

В прошлом году на соответствующем занятии была задача: найти ГМТ центров окружности, ортогональной двум данным окружностям. Искомое ГМТ – **все точки радикальной оси окружностей ω_1 и ω_2 , лежащие вне этих окружностей**.

Рис. 2



Доказательство. Пусть точка O – центр окружности ω , ортогональной данным окружностям ω_1 и ω_2 , тогда радиусы OA и OB этой окружности являются к ним касательными (см. рис. 2). Так как $OA = OB$, то O лежит на радикальной оси данных окружностей.

В обратную сторону: любая точка O радикальной оси данных окружностей (лежащая вне этих окружностей, если окружности имеют общие точки), имеет одинаковые степени относительно ω_1 и ω_2 . Следовательно, существует окружность с центром O , ортогональная им.

Из этого утверждения следует, что **если центр окружности ω лежит на радикальной оси окружностей ω_1 и ω_2 , и ω ортогональна одной из них, то она ортогональна и другой**.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

1. В окружности ω проведена хорда AB .

а) Объясните, как построить окружность, касающуюся AB и ω , причем хорды – в заданной точке P

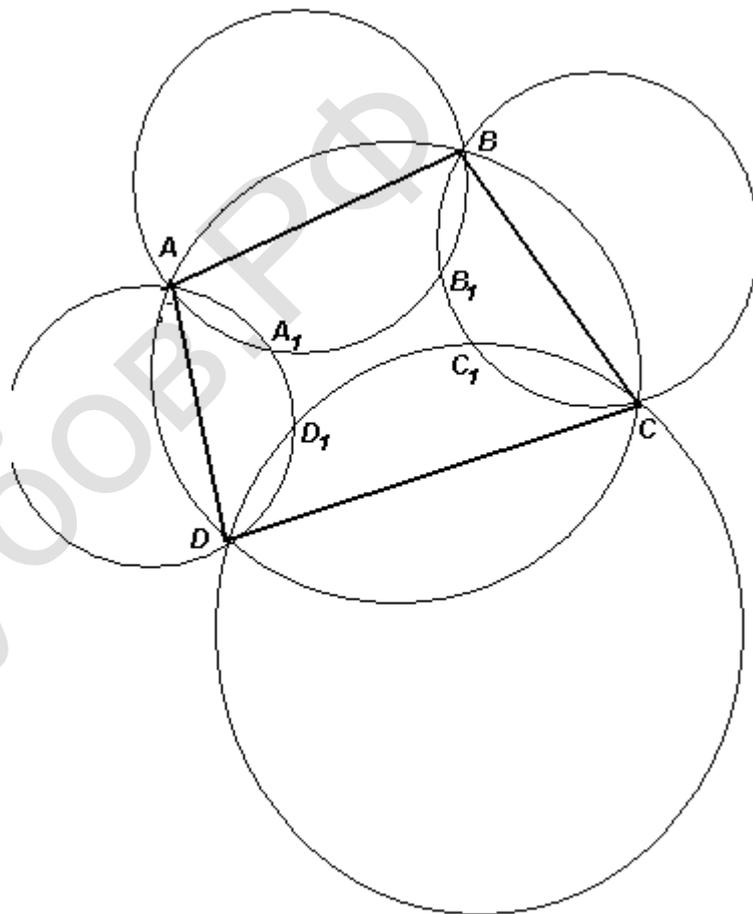
б) Пусть M – середина дуги AB , которой не касается построенная окружность. Докажите, что длина касательной, проведенной из точки M к этой окружности, равна MA .

в) Докажите, что если в этот же сегмент вписать две окружности, пересекающиеся в точках C и D , то прямая CD содержит точку M .

2. Из точки D окружности ω опущен перпендикуляр DC на диаметр AB . Окружность ω_1 касается отрезка CA в точке E , а также отрезка CD и окружности ω . Докажите, что DE – биссектриса треугольника ADC .

3. (Критерий Архимеда) В окружности β проведена хорда MN , L – середина одной из дуг MN , γ – окружность с центром L и радиусом LM . Окружность α касается хорды MN в точке V и лежит с точкой L в разных полуплоскостях относительно MN . Докажите, что окружности α и β касаются тогда и только тогда, когда γ и α ортогональны.

4. $ABCD$ – вписанный четырехугольник. а) Проведены еще четыре окружности, для которых стороны $ABCD$ являются хордами, A_1, B_1, C_1 и D_1 – точки их попарного пересечения (см. рис.). Докажите, что эти точки лежат на одной окружности. б) A_1 – основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на диагональ BD . Аналогично определяются точки B_1, C_1 и D_1 . Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.



5. $ABCD$ – вписанный четырехугольник. A_1 – центр окружности, вписанной в треугольник $B_1C_1D_1$. Аналогично определяются точки B_1, C_1 и D_1 . Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник.

6. В треугольнике ABC точки A_1 и C_1 – основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла B из вершин A и C соответственно; BB_1 – высота, D_1 – середина стороны AC . Докажите, что: а) точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на одной окружности; б) центр этой окружности лежит на окружности девяти точек треугольника ABC .

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AC в точке X , а невписанная окружность касается этой стороны в точке Y . Докажите, что: а) точки A_1, Y, C_1 и X лежат на одной окружности; б) центром этой окружности является середина AC .

8. (Теорема Фейербаха) а) Пусть в треугольнике: α – вписанная окружность, β – окружность девяти точек. Докажите, что α и β касаются, используя еще две окружности: из задачи 6 и из задачи 7; б) Докажите, что окружность девяти точек касается любой невписанной окружности.

9. В треугольнике ABC серединный перпендикуляр к стороне BC пересекает прямые AB и AC в точках A_B и A_C соответственно. Пусть O_a – центр описанной окружности треугольника AA_BA_C . Аналогично определяются точки O_b и O_c . Докажите, что описанная окружность треугольника $O_aO_bO_c$ касается описанной окружности исходного треугольника.