[ЦПМ, кружок по математике, 8 класс] Юргин Г.

[*2017–2018*] группа: Убегающие *30 сентября 2017*

Соответствия

Учимся говорить

1. Дан выпуклый n-угольник такой, что никакие три его диагонали не пересекаются в одной точке. Найдите количество точек пересечения диагоналей данного многоугольника (не являющихся вершинами многоугольника).

2. Доказать, что суммарное количество цифр в десятичной записи чисел 1, 2, 3, …, 10^k равно суммарному количеству нулей в десятичной записи чисел 1, 2, 3, …, 10^{k+1}.

3. Петя подсчитал количество всех возможных m-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T, O, W и N, причём в каждом слове букв T и O поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)

4. **(a)** Докажите, что количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, равно количеству разбиений числа n в сумму слагаемых, не превосходящих k.
(b) Докажите, что количество разбиений числа n, равно количеству разбиений числа $2n$ в сумму ровно n слагаемых.
(c) Докажите, что количество разбиений числа n в сумму различных слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму нечетных слагаемых.

5. В школе учатся 400 человек, из них 200 двоечников и 200 отличников. На Новый Год Дед Мороз привез мешок, в котором есть 800 конфет «Миндаль Иванович». Он хочет раздать их все детям, причем каждый двоечник должен получить не больше одной конфеты, а каждый отличник — хотя бы 2 конфеты, причем четное количество. Директор школы решил, кроме того, поощрить отличников, приготовив 600 мандаринов, которые хочет раздать так, чтобы каждому отличнику досталось не менее одного. У кого больше способов раздать свои подарки?

6. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем паросочетанием такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание чётным, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

7. Сколько существует подвешенных деревьев на n вершинах? (У каждой вершины все потомки считаются различными.)

8. Рассмотрим последовательность из n натуральных чисел. Будем называть ее уморительной, если вместе с каждым $k \geqslant 2$ в последовательность входит также и число $k-1$, причем первое вхождение $k-1$ до последнего вхождения k. Посчитайте количество уморительных последовательностей.

9. Пусть n и k — натуральные числа одной четности, причем $k \geqslant n$. Имеется $2n$ лампочек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, 2n$, каждая из которых может быть либо включена, либо выключена. Вначале все лампочки выключены. Рассматриваются упорядоченные последовательности шагов: на каждом шаге ровно одна из лампочек меняет свое состояние на противоположное.
Обозначим через M число последовательностей из k шагов, после которых все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все остальные выключены.
Обозначим через N число последовательностей из k шагов, после после которых все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все остальные выключены и при этом ни разу не меняли своего состояния.
Найдите отношение M/N.

10. На прямой сидит конечное число лягушек в различных целых точках. За ход ровно одна лягушка прыгает на 1 вправо, причём они по-прежнему должны быть в различных точках. Мы вычислили, сколькими способами лягушки могут сделать n ходов (для некоторого начального расположения лягушек). Докажите, что если бы мы разрешили тем же лягушкам прыгать влево, запретив прыгать вправо, то способов сделать n ходов было бы столько же.

Позсказака. Попытайтесь обобщить утверждение этой задачи: обобщение может сделать задачу проще.

Учимся писать

11. Дана шахматная доска. Ее вертикали перенумерованы числами от 1 до 8, а горизонтали обозначены латинскими буквами от a до h. Рассматриваются покрытия доски доминошками. Каких разбиений больше — тех, которые содержат доминошку a1–a2, или тех, которые содержат доминошку b2–b3?

12. Полоска 1×10 разбита на единичные квадраты. В квадраты записывают числа 1, 2, …, 10. Сначала в один какой-нибудь квадрат записывают число 1, затем число 2 записывают в один из соседних квадратов, затем число 3 — в один из соседних с уже занятыми и т. д. (произвольными являются выбор первого квадрата и выбор соседа на каждом шагу). Сколькими способами это можно проделать?