

Признаки делимости

Группа 7–8

1.11.2016

1. Признак делимости на 11 звучит так: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр на чётных местах и суммой цифр на нечётных местах делится на 11.
Например, рассмотрим число: 142536790. Посчитаем описанную выше разность, получается: $(4 + 5 + 6 + 9) - (1 + 2 + 3 + 7 + 0) = 11$. Из чего можно сделать вывод, что первоначальное число делится на 11.
(а) Докажите признак делимости на 11 для четырехзначных чисел.
(б) Докажите, что число вида $100 \dots 01$ с чётным числом нулей всегда делится на 11.
(с) Докажите признак делимости на 11.
2. (а) Сформулируйте и докажите признак делимости на 4.
(б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 25.
(с) Сформулируйте и докажите признак делимости на 2^k и на 5^k .
3. Дома у Олега есть сейф, но кода он не знает. Бабушка рассказала Олегу, что код состоит из 7 цифр — двоек и троек, причем двоек больше, чем троек. А дедушка — что код делится и на 3, и на 4. Сможет ли Олег с первой попытки открыть сейф?
4. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причём одинаковые цифры — на одинаковые буквы, а разные — на разные. В итоге у него получилось
(а) $AB \cdot CD = EFFF$.
(б) $AB \cdot CD = EFFE$.
Докажите, что он где-то ошибся.
5. Признак делимости на 7 можно сформулировать так: разобьём наше число на трёхзначные числа (начиная с разряда единиц) и рассмотрим разность суммы чётных по счёту трёхзначных чисел и суммы нечётных по счёту. Если получившийся результат делится на 7, то и первоначальное число делится на 7.
Например, рассмотрим число 789123456121. Оно разбивается на четыре трёхзначных числа: 789, 123, 456, 121. Посчитаем вышеописанную разность, получается: $(789 + 456) - (123 + 121) = 1001$. Это число делится на 7, тогда и первоначальное число делится на 7.
(а) Докажите признак делимости на 7 для 8-значных чисел.
(б) Докажите признак делимости на 7 для произвольных чисел.
(с) Сформулируйте аналогичный признак делимости на 13 и докажите его.
6. Вася выписал число $\frac{1}{5^n}$ в виде десятичной дроби. Затем стер десятичную запятую и откинул нули, которые записаны в начале числа. Докажите, что получившееся число является степенью двойки. (Например: $\frac{1}{125} = 0,008$, а 8 — степень двойки)
7. Придумайте признак делимости на 101.
8. Существует ли такое десятизначное число n , что для любых ненулевых цифр a и b число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$?