

Малая теорема Ферма

7–8 класс
25.04.2017

Чем отличается ученик математического класса от ученика географического, экономического, политологического класса? Тем, что он больше размышляет над задачами? Да, и этим тоже. Но не только. Ещё он знает малую теорему Ферма...

В. Сендеров, А. Спивак,
“Малая теорема Ферма”
(журнал “Квант”, 2000, №1)

- Пусть a — некоторое число, которое не делится на простое число p .
(а) Докажите, что в последовательности $0 \cdot a, 1 \cdot a, 2 \cdot a, \dots, (p-1) \cdot a$ все числа дают разные остатки по модулю p .
(б) Докажите, что $(1 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot \dots \cdot ((p-1) \cdot a) \equiv (p-1)!$.
(с) (Малая теорема Ферма) Докажите, что $a^{p-1} \equiv 1$.
- Найдите остаток от деления 23^{1600} на 41.
- Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.
- Докажите, что $n^7 - n$ делится на 42.
- Докажите, что либо $n^{18} - 1$, либо $n^{18} + 1$ делится на 37.
- Докажите, что число $40^{81} + 17^{160}$ является составным.

Задачи на подумать

- Отметим на бумаге произвольным образом $p-1$ точку. Каждой точке сопоставим какой-то ненулевой остаток при делении на p . Проведём из остатка k стрелочку в остаток ka .
(а) Убедитесь, что из каждой точки выходит одна стрелочка, и в каждую точку входит одна стрелочка.
(б) Поймите, что тогда все точки разбиваются на циклические маршруты.
(с) Докажите, что у всех циклических маршрутов одна и та же длина, и она делит $p-1$.
(д) Выведите отсюда малую теорему Ферма.
- Пусть p и q различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q$.
- Докажите, что для любого простого $p > 5$ справедливо, что
а) число $\underbrace{111 \dots 11}_{p-1}$ делится на p ;
б) число $\underbrace{111 \dots 11}_p$ не делится на p .
- Найти все такие простые числа p , что число $5^{p^2} - 1$ делится на p .
- Докажите, что для любого простого p число $2^{2^p} - 4$ делится на $2^p - 1$.
- Может ли число $2^{1260} + 3^{1260} - 1$ быть точной десятой степенью?