Комбинаторный метод в теории чисел

Пусть m – число элементов некоторого множества M. Чтобы доказать, что m кратно k, не обязательно знать явную формулу для m. Можно вместо этого разбить M на k-элементные подмножества.

1. Докажите, что число способов

а) поставить на шахматную доску не бьющих друг друга коня и ладью – четно.

б) поставить на шахматную доску не бьющих друг друга коня, слона и ладью – кратно 4.

в) разрезать шахматную доску $N\times N$ на домино – четно.

г) разрезать куб со стороной 10 на прямоугольные параллелепипеды $1\times1\times2$ – кратно 3.

Рассмотрение исключений. При естественном способе разбиения могут на на k-элементные подмножества разбиться не все, а почти все элементы М. Тогда с исключениями можно разобраться отдельно.

2. Докажите, что число способов

а) поставить на шахматную доску 2 не бьющие друг друга белые ладьи – кратно 4.

б) число равнобедренных треугольников с вершинами в вершинах правильного N-угольника кратно N (если N не кратно 3) или кратно $N/3$ при N кратном 3.

Сущность комбинаторного метода. Пусть m задано формулой. Можно подобрать множество M для которого m – число элементов, и доказать делимость комбинаторным методом.

3. (Делимость на факториал) **а)** Докажите, что произведение n последовательных натуральных чисел всегда делится на n!

б) Обобщите этот результат на целые числа.

4. Важная лемма о блохе.

а) Пусть p – простое число. По окружности расставлено p точек, по которым прыгает блоха. Это вредное насекомое движется по часовой стрелке, каждый раз перепрыгивая через одинаковое число точек в *другую* точку. Докажите, что она побывает на всех точках.

б) Верно ли это утверждение для составного p?

в) А при каком ограничении на шаг блохи становится верным?

5. ***(Малая теорема Ферма)*** Пусть p – простое число. Рассмотрим ожерелья из p бусинок, каждая из которых покрашена в один из a цветов.

а) Сколько всего существует таких ожерелий?

б) Сколько существует ожерелий, которые переходят в себя при некотором (неполном) повороте?

в) Теперь будем считать одинаковыми ожерелья, переходящие друг в друга при некотором повороте. Сколько всего существует различных ожерелий при новом определении?

г) Докажите малую теорему Ферма: $a^p - a$ делится на p.

6. ***(Теорема Вильсона)*** Пусть p – простое число. На плоскости отмечены вершины правильного p-угольника.

а) Посчитайте число замкнутых ориентированных ломанных, проходящих по всем вершинам этого p-угольника.

б) Теперь будем считать одинаковыми ломанные, переходящие друг в друга при повороте. Сколько теперь есть различных ломанных?

в) Докажите *теорему Вильсона*: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Ягубов.РФ

Домашнее задание

КМТЧ1. Докажите, что у натурального числа N нечетное число делителей (включая 1 и N) $\Leftrightarrow$ N – точный квадрат.

КМТЧ2. Делится ли на 8 общее число способов расставить на шахматной доске одну или несколько неразличимых ладей так, чтобы они не били друг друга?

КМТЧ3. Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если любая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно
а) делится на 12!;
б) делится на 13!.

КМТЧ4. ***(Интересная реккурента)***

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность, заданная соотношениями $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$,

$a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ для $n > 3$. Докажите, что a_p делится на p для любого простого p.

Подсказка: Покажите, что a_n – количество способов разрезать клетчатое кольцо из n клеток на доминошки 1×2 и триминошки 1×3.

А.В.Шаповалов, апрель 2010 г. www.ashap.info/Uroki/1543/2009-10/index.html

Ягубов.РФ