Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sqrt{2}\cos x=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

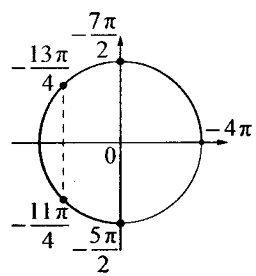
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\cos^2 x+\sqrt{2}\cos x=0;\ \cos x\cdot\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)=0.$$

Значит, или $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{13\pi}{4}$; $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{13\pi}{4}$; $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=5$, $SK:KB=4:3$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку C.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение.

а) Пусть точка N — середина ребра AC, прямая BN пересекает плоскость α в точке H (рис. 1), а SO — высота пирамиды $SABC$. Поскольку пирамида $SABC$ правильная, точка пересечения медиан треугольника ABC совпадает с точкой O. Значит, прямая SO лежит в плоскости SBN (рис. 2). Следовательно, плоскость SBN перпендикулярна плоскости ABC.

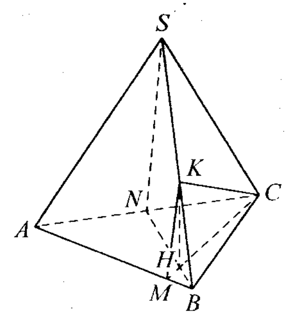


Рис. 1

Получаем, что прямая KH, являющаяся прямой пересечения плоскостей SBN и α, перпендикулярна плоскости ABC и параллельна прямой SO. В треугольнике SOB имеем:

$$BH=\frac{KB}{SB}\cdot OB=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}BN=\frac{2}{7}BN.$$

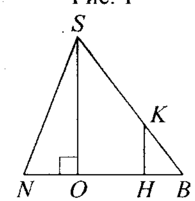


Рис. 2

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 3). Пусть L — такая точка на отрезке AM, что прямые LN и CM параллельны, а H_1 — точка пересечения прямых BN и CM. Тогда отрезок LN — средняя линия треугольника ACM, следовательно,

$$AL=LM=\frac{AM}{2}=2{,}5.$$

Получаем:

$$BH_1=\frac{BM}{BL}\cdot BN=\frac{1}{1+2{,}5}\cdot BN=\frac{2}{7}BN.$$

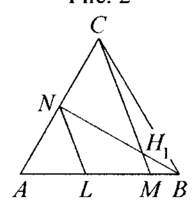


Рис. 3

Таким образом, прямая CM делит отрезок BN в таком же отношении, что и плоскость α, значит, плоскость α содержит точку C.

б) Из доказанного в пункте *а* следует, что искомое сечение — треугольник CKM.

В треугольнике SOB имеем:

$$OB=\frac{2}{3}BN=\frac{2}{3}\cdot\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{AB}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3};\ SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{48-12}=6;$$

$$KH=\frac{KB}{SB}\cdot SO=\frac{3}{7}\cdot 6=\frac{18}{7}.$$

По теореме косинусов в треугольнике BCM имеем:

$$CM=\sqrt{BM^2+BC^2-2\cdot BM\cdot BC\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{1+36-2\cdot 1\cdot 6\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{31}.$$

Отрезок KH перпендикулярен плоскости ABC, а значит, и прямой CM. Следовательно, он является высотой треугольника CKM. Площадь треугольника CKM равна

$$\frac{CM\cdot KH}{2}=\frac{9\sqrt{31}}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{31}}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $x^2\log_{343}(x+3)\le\log_7\left(x^2+6x+9\right)$.

Решение.
Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{x^2}{3}\cdot\log_7(x+3)\le 2\log_7(x+3);\ \left(x^2-6\right)\log_7(x+3)\le 0.$$

Заметим, что выражение $\log_7(x+3)$ определено при $x>-3$, принимает отрицательные значения при $-3<x<-2$, равно 0 при $x=-2$ и принимает положительные значения при $x>-2$.

При $-3<x<-2$ неравенство принимает вид $x^2-6\ge 0$, откуда $x\le-\sqrt{6}$; $x\ge\sqrt{6}$. Учитывая ограничение $-3<x<-2$, получаем $-3<x\le-\sqrt{6}$.

При $x>-2$ неравенство принимает вид $x^2-6\le 0$, откуда $-\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6}$. Учитывая ограничение $x>-2$, получаем $-2<x\le\sqrt{6}$.

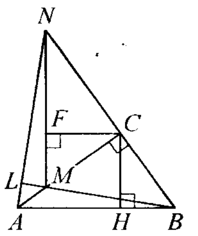
Таким образом, решение исходного неравенства: $-3<x\le-\sqrt{6}$; $-2\le x\le\sqrt{6}$.

Ответ: $\left(-3;-\sqrt{6}\right]$; $\left[-2;\sqrt{6}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -2, $-\sqrt{6}$ и/или $\sqrt{6}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC, а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C, причём $CM=BC$ и $CN=AC$.
а) Отрезки CH и CF — высоты треугольников ACB и NCM соответственно. Докажите, что прямые CH и CF перпендикулярны.
б) Прямые BM и AN пересекаются в точке L. Найдите LM, если $BC=4$, а $AC=8$.

Решение.



а) Прямоугольные треугольники ABC и NMC равны по двум катетам. Пусть $\angle BAC=\alpha$, тогда по свойству высоты в прямоугольном треугольнике:

$$\angle ACH=90^\circ-\alpha,\ \angle FCM=\angle CNM=\angle CAB=\alpha,$$

откуда

$$\angle FCH=\angle FCM+\angle ACH=\alpha+\left(90^\circ-\alpha\right)=90^\circ.$$

б) По условию $CN=AC$ и $CM=BC$, поэтому

$$\angle LAM=\angle NAC=45^\circ,\ \angle AML=\angle CMB=45^\circ,$$

откуда $\angle ALM=90^\circ$, то есть ALM — равнобедренный прямоугольный треугольник. Значит,

$$LM=\frac{\sqrt{2}}{2}AM=\frac{\sqrt{2}}{2}(AC-CM)=\frac{\sqrt{2}}{2}(AC-BC)=2\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $2\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 220 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 220 тыс. рублей;

— выплаты в 2030 и 2031 годах равны;

— к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите r, если известно, что долг будет выплачен полностью и общий размер выплат составит 420 тыс. рублей.

Решение.

Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, а выплаты с февраля по июнь в 2030 и 2031 годах составляют по x тыс. рублей. В июле 2027, 2028 и 2029 годов долг перед банком не меняется, а ежегодные выплаты составляют по $220(k-1)$ тыс. рублей.

В январе 2030 года долг (в тыс. рублей) равен $220k$, а в июле — $220k-x$. В январе 2031 года долг равен $220k^2-kx$, а в июле — $220k^2-(k+1)x$. По условию, к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью, значит, $220k^2-(k+1)x=0$, откуда $x=\frac{220k^2}{k+1}$.

Таким образом, общий размер выплат составляет

$$3\cdot 220(k-1)+2x=660k-660+\frac{440k^2}{k+1}=\frac{1100k^2-660}{k+1}=420,$$

откуда

$$1100k^2-420k-1080=0;\ 55k^2-21k-54=0.$$

Значит, $k=1,2$ и $r=20$.

Ответ: 20.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{16-y^2}=\sqrt{16-a^2x^2},\\ x^2+y^2=8x+4y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Заметим, что при $|y|>4$ левая часть первого уравнения системы не определена, а при $-4\le y\le 4$ первое уравнение системы принимает вид:

$$16-y^2=16-a^2x^2;\ y^2=a^2x^2,$$

откуда $y=ax$ или $y=-ax$.

При $y=ax$ второе уравнение системы принимает вид:

$$x^2+a^2x^2=8x+4ax;\ \left(a^2+1\right)x^2=(4a+8)x,$$

откуда $x=0$ или $x=\frac{4a+8}{a^2+1}$. В этих случаях получаем $y=0$ и $y=\frac{4a^2+8a}{a^2+1}$ соответственно.

При $y=-ax$ второе уравнение системы принимает вид:

$$x^2+a^2x^2=8x-4ax;\ \left(a^2+1\right)x^2=(8-4a)x,$$

откуда $x=0$ или $x=\frac{8-4a}{a^2+1}$. В этих случаях получаем $y=0$ и $y=\frac{4a^2-8a}{a^2+1}$ соответственно.

Таким образом, решениями исходной системы являются пары чисел $(0;0)$, $\left(\frac{4a+8}{a^2+1};\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$, $\left(\frac{8-4a}{a^2+1};\frac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$, для которых выполнено условие $-4\le y\le 4$.

Для пары $(0;0)$ условие $-4\le y\le 4$ выполнено.

Для пары $\left(\frac{4a+8}{a^2+1};\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$ условие $-4\le y\le 4$ принимает вид:

$$-4\le\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\le 4;\ -a^2-1\le a^2+2a\le a^2+1;\ \begin{cases}2a^2+2a+1\ge 0,\\ 2a-1\le 0,\end{cases}$$

откуда $a\le\frac{1}{2}$, поскольку решением неравенства $2a^2+2a+1\ge 0$ является любое число.

Для пары $\left(\frac{8-4a}{a^2+1};\frac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$ условие $-4\le y\le 4$ принимает вид:

$$-4\le\frac{4a^2-8a}{a^2+1}\le 4;\ -a^2-1\le a^2-2a\le a^2+1;\ \begin{cases}2a^2-2a+1\ge 0,\\ 2a+1\ge 0,\end{cases}$$

откуда $a\ge-\frac{1}{2}$, поскольку решением неравенства $2a^2-2a+1\ge 0$ является любое число.

Пары $(0;0)$ и $\left(\frac{4a+8}{a^2+1};\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$ совпадают при $a=-2$.

Пары $(0;0)$ и $\left(\frac{8-4a}{a^2+1};\frac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$ совпадают при $a=2$.

Пары $\left(\frac{4a+8}{a^2+1};\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$ и $\left(\frac{8-4a}{a^2+1};\frac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$ совпадают при $a=0$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a<-2$; $-2<a<-\frac{1}{2}$; $a=0$; $\frac{1}{2}<a<2$; $a>2$.

Ответ: $a<-2$; $-2<a<-\frac{1}{2}$; $a=0$; $\frac{1}{2}<a<2$; $a>2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением не более двух из пяти точек: $a=-2$, $a=-\frac{1}{2}$, $a=0$, $a=\frac{1}{2}$, $a=2$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением более двух из пяти точек: $a=-2$, $a=-\frac{1}{2}$, $a=0$, $a=\frac{1}{2}$, $a=2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 6.
а) Может ли сумма этих чисел быть равна 198?
б) Может ли сумма этих чисел быть равна 270?
в) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1518?

Решение.
а) Пусть на доске написаны числа 6, 36 и 156. Тогда их сумма равна 198.
б) Каждое из написанных чисел оканчивается на 6, поэтому если их сумма оканчивается на 0, то их количество должно делиться на 5. Сумма пяти наименьших чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 6, равна $6+36+66+96+126=330$. Значит, получить сумму 270 невозможно.
в) Пусть на доске написано n чисел. Заметим, что любое число, которое оканчивается на 6, представимо в виде $5k+1$. Значит, сумма чисел, написанных на доске, равна $1518=5m+n$. Следовательно, n даёт остаток 3 при делении на 5.
Предположим, что $n \geq 13$. Сумма тринадцати наименьших чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 6, равна

$$6+36+66+\ldots+336+366=\frac{13\cdot(6+366)}{2}=2418>1518.$$

Значит, $n<13$, следовательно, $n \leq 8$.
Покажем, что могло быть написано восемь чисел. Например, сумма восьми чисел 6, 36, 66, 96, 126, 156, 186, 846 равна 1518.
Ответ: а) да; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4