10 класс **Неравенства** 20 ноября 2017

1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a + b + c).$$

2. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 2$. Докажите неравенство $abc \geqslant 8(1 - a)(1 - b)(1 - c)$.

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3 \geqslant a^2b^2c^2(a + b + c).$$

4. Для положительных x, y, z верно $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажите, что
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z.$$

5. Положительные x, y, z таковы, что $xyz = 1$. Докажите неравенство
$$\frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y^3}{(z+1)(x+1)} + \frac{z^3}{(x+1)(y+1)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

6. (IMO). Положительные a, b, c, d таковы, что $ab + bc + cd + da = 1$. Докажите неравенство
$$\sum_{cyclic} \frac{a^3}{b + c + d} \geqslant \frac{1}{3}.$$

7. Неравенство Гёльдера. Для неотрицательных $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ докажите неравенство
$$(a_1^3 + \cdots + a_n^3)(b_1^3 + \cdots + b_n^3)(c_1^3 + \cdots + c_n^3) \geqslant (a_1b_1c_1 + \cdots + a_nb_nc_n)^3.$$

8. (IMO 2012). Неотрицательные $a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_2a_3 \ldots a_n = 1$. Докажите неравенство
$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \geqslant n^n.$$

9. (Япония 2010). Для положительных чисел x, y, z докажите, что
$$\frac{1 + zx + zy}{(1 + x + y)^2} + \frac{1 + yx + yz}{(1 + x + z)^2} + \frac{1 + xy + xz}{(1 + y + z)^2} \geqslant 1.$$

10 класс **Неравенства** 20 ноября 2017

1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a + b + c).$$

2. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 2$. Докажите неравенство $abc \geqslant 8(1 - a)(1 - b)(1 - c)$.

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3 \geqslant a^2b^2c^2(a + b + c).$$

4. Для положительных x, y, z верно $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажите, что
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z.$$

5. Положительные x, y, z таковы, что $xyz = 1$. Докажите неравенство
$$\frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y^3}{(z+1)(x+1)} + \frac{z^3}{(x+1)(y+1)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

6. (IMO). Положительные a, b, c, d таковы, что $ab + bc + cd + da = 1$. Докажите неравенство
$$\sum_{cyclic} \frac{a^3}{b + c + d} \geqslant \frac{1}{3}.$$

7. Неравенство Гёльдера. Для неотрицательных $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ докажите неравенство
$$(a_1^3 + \cdots + a_n^3)(b_1^3 + \cdots + b_n^3)(c_1^3 + \cdots + c_n^3) \geqslant (a_1b_1c_1 + \cdots + a_nb_nc_n)^3.$$

8. (IMO 2012). Неотрицательные $a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_2a_3 \ldots a_n = 1$. Докажите неравенство
$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \geqslant n^n.$$

9. (Япония 2010). Для положительных чисел x, y, z докажите, что
$$\frac{1 + zx + zy}{(1 + x + y)^2} + \frac{1 + yx + yz}{(1 + x + z)^2} + \frac{1 + xy + xz}{(1 + y + z)^2} \geqslant 1.$$